

MATHEMATIQUES PREMIER SEMESTRE

TRAVAUX DIRIGES N°1

**Exercice 1**

L'application  $\rho : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$\rho(x,y) = (x-y)^2 \text{ est-elle une distance sur } \mathbf{R} ?$$

Dessiner dans  $\mathbf{R}^2$ , pour chacune des distances suivantes, une boule de centre  $O(1,0)$  et de rayon 2.

a)  $d_1(x,y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$

b)  $d_2(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

c)  $d_3(x,y) = \text{Max}(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$

**Exercice 2**

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$\frac{x-|x|}{x} ; \frac{\sqrt{x^2}}{x} ; |x|\ln(x) ; \frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2} ; \ln(\ln(x)) ; \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

**Exercice 3**

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln(x) x^2 ; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{e^x - \ln(x)} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x^3} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)(e^x - 5) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^x ;$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{-\ln(x)} e^{-x} x .$$

**Exercice 4**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} - x$  si  $x \in ]0, 1/2[$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ,

$$f(x) = \frac{3}{2} - x \text{ si } x \in ]1/2, 1[ \text{ et } f(1) = 1 .$$

Tracer le graphe de  $f$ . Etudier sa continuité.

**Exercice 5**

La fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$  admet-elle un prolongement par continuité en

$x = 1$ , en  $x = -1$  ?