L1 ECO MANAGEMENT

MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°3

Exercice 1

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 \ ; \ f_2(x,y) = 5x^{1/3}y^{2/3} \ ; \ f_3(x,y) = \frac{4x-9y}{3x+5y}$$

$$f_4(x,y) = e^{2x+3y}(3x+2y) \ ; \ f_5(x,y) = \sin(x+y)\cos(3x-y) \ ; \ f_6(x,y,z) = \frac{y-z}{x+z} .$$

Exercice 2

a) Montrer que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

b) La limite suivante existe-telle ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

a) Quel est le domaine de définition de la fonction f.

b) Montrer que f n'est pas continue en (0,0).

c) Calculer, à partir de la définition d'une dérivée partielle, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

d) Qu'en concluez vous ?

Exercice 4

Soit

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ à partir de la définition des dérivées partielles.

Exercice 5

Déterminer et représenter les courbes de niveau -1, 0, 1 et 2 des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = x - y + 1 \ ; \ f_2(x,y) = 4 - 2y \ ; \ f_3(x,y) = y^2 \ ; \ f_4(x,y) = e^{x+y} \ ;$$

$$f_5(x,y) = x^2 + y^2 + 4$$

Exercice 6
Calculer les plans tangents aux surfaces définies par les fonctions suivantes aux points indiqués. Préciser si ces plans sont horizontaux ou non.

$f_1(x,y) = x^2 + xy - y^2$ en (1,1) et (1,-2)

$f_2(x,y) = x^3 - xy + x + y$ en (0,0) et (1,4)

$f_3(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ en (2,1) et (2,1/2)

Exercice 7
Soit $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2$. Calculer la matrice hessienne de f au point (0,0).

Exercice 8
Ecrire le développement de Taylor à l'ordre deux en (0,0) des fonctions suivantes :

$f(x,y) = 1 + x^2 - e^{x+y}$, $g(x,y) = e^x - \ln(1+y)$, $h(x,y) = \sqrt{1+x+y}$

Exercice 9
Indiquer l'ensemble de définition des fonctions suivantes ; déterminer leurs points critiques ; optimiser ses fonctions.

$f_1(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$; $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 2$; $f_3(x,y) = x^2y + 3x + y + 1$;

$f_4(x,y) = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + xy}$; $f_5(x,y) = (x^3 + 3x)(y^2 - 2y + 1)$;

$f_6(x,y) = (x^3 - 3x)(y^2 - 1)$; $f_7(x,y) = x^4 + y^2 + xy^2 - 1$; $f_8(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 - y^2}(x - y + 1)$;

$f_9(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 - xy}x$; $f_{10}(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$;