L2 Eco Management

MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°1

Thème abordé :
Les développements limités

Objectifs :
- Trouver le développement limité d'une fonction simple à partir des développements des fonctions usuelles à l'aide des opérations suivantes : somme, produit, quotient, composition, dérivation et intégration.
- Appliquer les développements limités à la recherche de limites et à l'étude locale des fonctions.

Ecriture d'un développements limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Cette écriture est impérative à l'examen. Les étudiants connaissant la notation de Landau peuvent aussi l'utiliser.

Notions de 1ère année à revoir :
- Limites
- Dérivées
- Formule de Taylor, de Mac Laurin

Exercice 1 : opérations sur les D.L.

a) Produit de D.L.

Calculer le développement limité au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 3 des fonctions suivantes :
$x \to \sin x \cos x$, $(\ln(1+x))^2$.

b) Quotient de D.L.

Trouver le développement limité au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 4 de la fonction $x \to \dfrac{x}{e^x - 1}$.

Trouver le développement limité au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 5 de la fonction $x \to \operatorname{tg} x$.

c) Composition de D.L.

Trouver le développement limité au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 4 de la fonction $x \to \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Trouver le développement limité au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 6 de la fonction :
$x \to \ln(1 - x + x^2)$.

Exercice 2 : développements limités au voisinage de $x_0 \neq 0$

Trouver le développement limité au voisinage de $x = \dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 3 de la fonction $x \to \sin(x)$.

Exercice 3 : développements limités au voisinage de l'infini
Trouver le développement limité au voisinage de l'infini à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

$x \to \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

$x \to \dfrac{x^3 + 2}{x - 1}$

Exercice 4 : application des D.L. à la recherche de limites
Chercher la limite au point 0 de la fonction :

$x \to \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^{1/x}$

Exercice 5 : application des D.L. à l'étude des fonctions

1-a) Montrer que la fonction $f : x \to x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ admet au voisinage de l'infini un développement asymptotique de la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1-b) Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Etudier la position du graphe de la fonction $x \to \sqrt{x(x + 2x)}e^{\frac{1}{x}}$ par rapport à son asymptote.