L2 Eco Management

MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°2

Thèmes abordés :
- Séries numériques, séries à termes positifs, séries alternées
- Séries entières
- Rayon de convergence d'une série entière
- Développement en série entière d'une fonction

Objectifs :
- Savoir établir la nature de séries numériques à partir des critères vus en cours.
- Savoir développer en série entière les fonctions usuelles ou proches de fonctions usuelles.

Exercice 1

En justifiant votre réponse, classer les douze séries suivantes en 4 catégories :
- celles telles que u_k ne tend pas vers 0 lorsque k tend vers l'infini
- celles qui divergent et telles que $\lim(u_k)=0$
- celles qui convergent absolument (AC)
- celles qui convergent mais non absolument (SC)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+1}{2k^3+3k+5}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k}+\frac{1}{k^2}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1000}{3^k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{k}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[k]{k})}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k}.$$

Exercice 2

Trouver le rayon de convergence des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(x-1)^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k}}{k}x^k$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3x^k$$

Exercice 3

Développer en série entière autour de 0, les fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence):

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad \ln(1+x^3), \quad (2+x)e^x.$$

Exercice 4

a) Développer en série entière la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.
b) En déduire le développement en série entière d'une primitive de f.