L2 Eco Management

MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°3

Thèmes abordés :
Intégrales impropres

Objectifs :
Savoir établir la nature d'intégrales impropres en appliquant les critères vus en cours.

Exercice 1

Pour quelles valeurs des paramètres p et q l'intégrale suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[q]{1+x^p}}dx$$

Exercice 2

Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2}dx$ est convergente.

Exercice 3

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ est convergente.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ est divergente.

c) Conclusion.

Exercice 4

Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} e^{-px}\cos x\,dx$ est absolument convergente.

Exercice 5

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}dx,\ \int_1^{\infty} \frac{x}{x^4-1}dx,\ \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx,\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx,\ \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+3x+2}dx,\ \int_0^{1} \frac{1}{2x^2-x}dx.$$

Exercice 6

a) Etudier la nature de l'intégrale impropre $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{p-1}dt$ suivant les valeurs de p.

b) Etablir que pour $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

c) Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n = 1, 2, \ldots$