

L2 ECO MANAGEMENT

PROBABILITES

TRAVAUX DIRIGES N°1

Thèmes abordés :

- Epreuve, événement élémentaire, σ -algèbre, espace probabilisable, espace probabilisé ;
- Probabilité conditionnelle, événements indépendants deux à deux, événements mutuellement indépendants ;
- Système complet d'événements ; formule des probabilités totales, théorème de Bayes.

Notions d'algèbre à revoir :

- Opérations sur les ensembles : réunion, intersection, passage au complémentaire, différence, différence symétrique ; produit cartésien d'ensembles.
- Ensemble dénombrable ;
- Notions combinatoires : nombre de parties d'un ensemble comportant n éléments.

Questions à se poser :

- Faire dans une épreuve la différence, au niveau des conséquences, entre objets discernables et objets indiscernables.
- Quelle différence y-a-t-il entre un événement élémentaire et un événement ?
- Lorsque le nombre d'éléments d'un espace d'événements élémentaires est fini, quelle σ -algèbre peut-on choisir pour représenter l'ensemble des événements ?
- Deux événements incompatibles (correspondant donc à des ensembles disjoints) peuvent-ils être indépendants ?
- Des événements mutuellement indépendants sont-ils indépendants deux à deux ?
La réciproque est-elle vraie ? Trouver des contre-exemples sinon.
- A quoi sert le théorème de Bayes ?

Exercices de T.D.

Exercice 1

On lance d'abord un dé, puis on lance une pièce un nombre de fois égal au chiffre apparu sur le dé. On note la suite de «pile ou «face» ainsi obtenue.

- Décrire l'univers des événements élémentaires.
- Soit A l'événement «le côté face est apparu deux fois». Exprimer l'événement A à l'aide d'événements élémentaires.

Exercice 2

On lance d'abord une pièce. Si «face» apparaît, on lance un dé rouge. Si «pile» apparaît, on lance un dé vert. On note le côté apparu sur la pièce et le chiffre apparu sur le dé.

- Décrire l'espace des événements élémentaires.
- Soit A l'événement «le chiffre apparu sur le dé lancé est au moins égal à quatre». Exprimer l'événement A à l'aide d'événements élémentaires.

Exercice 3

On considère l'épreuve consistant à lancer un dé rouge et un dé blanc simultanément.

- Décrire l'univers Ω des événements élémentaires associé à cette épreuve.
- Si l'on fait l'hypothèse que les dés sont parfaitement équilibrés, quelle probabilité attribuez-vous à chacun des événements de Ω ?
- Calculer alors les probabilités des événements suivants :
 - A : le chiffre apparu sur chacun des dés est le même ;
 - B : le chiffre apparu sur le dé rouge est plus grand que celui apparu sur le dé blanc ;
 - C : la somme des chiffres apparus sur les deux dés vaut 6.
- Si l'on remplace les deux dés de l'exercice par deux dés indiscernables, quelles sont les issues discernables de l'épreuve et quelles sont les probabilités correspondantes ?

Exercice 4

Un autobus transporte n passagers. Au prochain arrêt, chacun d'entre eux peut descendre avec une probabilité p . La probabilité pour qu'un nouveau passager monte dans l'autobus est p_0 et la probabilité pour qu'aucun nouveau passager ne monte dans l'autobus est $1 - p_0$.

Trouver la probabilité pour que l'autobus contienne toujours n passagers lorsqu'il repart.

Exercice 5

Soit A et B deux événements sur Ω . Calculer la probabilité pour que l'un des deux événements A et B se produise (on exclue l'événement $A \cap B$).

Exercice 6

On lance de façon répétée une pièce de monnaie bien équilibrée. Quelle est la probabilité pour qu'au $n^{\text{ième}}$ lancer :

- l'événement «face» apparaisse pour la première fois ?
- le nombre de «face» apparus soit égal au nombre de «pile» ?
- deux «face» sont apparus ?
- au moins deux «face» sont apparus ?

Exercice 7

On est dans un pays où il fait beau 5 jours sur 7. Deux stations météo S1 et S2 annoncent indépendamment l'une de l'autre le temps qu'il va faire. La station S1 est fiable à 90% lorsqu'il fait beau et à 80% lorsqu'il fait mauvais. La station S2 est fiable à 85% lorsqu'il fait beau et à 80% lorsqu'il fait mauvais.

- Calculer la probabilité pour qu'il fasse mauvais lorsque S1 annonce du mauvais temps.
- Calculer la probabilité pour qu'il fasse beau lorsque S2 annonce du beau temps.
- Lorsque S1 annonce du mauvais temps et S2 annonce du beau temps, quelle station a le plus de chances d'avoir raison ?

Exercice 8

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. A et B sont deux événements indépendants.

- Montrer que \bar{A} et B sont indépendants.
- En déduire que \bar{A} et \bar{B} sont aussi indépendants.

Exercice 9

On lance n fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Soit A l'événement : «pile est apparu au moins deux fois» et B l'événement : «face est apparu une ou deux fois».

Examiner l'indépendance de ces événements dans les cas où $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 10

On mène une enquête sur les causes d'une catastrophe aérienne. On émet trois hypothèses incompatibles H_1, H_2, H_3 , et H_4 dont les probabilités a priori (avant la catastrophe) sont :

$$P(H_1) = 0,2, P(H_2) = 0,4, P(H_3) = 0,3 \text{ et } P(H_4) = 0,1.$$

Une enquête a établi qu'au cours de la catastrophe, l'événement :

$A = \{\text{«inflammation du combustible»}\}$ s'est produit.

Les données statistiques permettent de dire que :

$$P(A|H_1) = 0,9, P(A|H_2) = 0, P(A|H_3) = 0,2 \text{ et } P(A|H_4) = 0,3$$

Trouver les probabilités a posteriori des hypothèses sachant que le combustible s'est enflammé.

Exercice 11

Deux pistes de ski vont de A vers B et deux autres pistes vont de B vers C . Chacune de ces quatre pistes peut être fermée pour cause d'enneigement trop important, indépendamment des autres, avec une probabilité p .

a) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait une piste ouverte de A vers B sachant qu'il n'y a pas de voie ouverte allant de A vers C ?

b) On suppose dans cette question qu'une piste relie directement A à C . Cette piste peut être fermée pour cause d'enneigement trop important, indépendamment des autres, avec une probabilité p . Répondre alors à la question a).

Exercice 12

Un nombre aléatoire N de dés est lancé. A_i désigne l'événement $N = i$ et $P(A_i) = 1/2^i$ pour $i \geq 1$. La somme des chiffres apparus est notée S . Trouver la probabilité pour que :

a) $N = 2$ sachant que $S = 4$.

b) $S = 4$ sachant que N est pair.

c) $N = 2$ sachant que $S = 4$ et que le chiffre apparu sur le premier dé est 1.

Exercices supplémentaires

S1

Deux composants, numérotés 1 et 2, opèrent dans un système jusqu'à ce qu'ils tombent en panne. On enregistre la suite des instants (en heures) où ils sont tombés en panne.

a) Décrire l'espace des événements élémentaires.

b) Soit A l'événement «le composant 1 a une durée de vie supérieure à 1000h» et B l'événement «le composant 1 a une durée de vie supérieure à celle du composant 2». Exprimer l'événement A et l'événement B à l'aide d'événements élémentaires.

c) Décrire les événements suivants : $A \cup B, A \cap B, A \cap \bar{B}$.

S2

Etant donné deux événements E et F dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et m événements H_1, H_2, \dots, H_m vérifiant :

$$H_i \cap H_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \text{ et } H_1 \cup \dots \cup H_m = \Omega$$

établir la formule :

$$P(F|E) = \sum_{i=1}^m P(H_i|E)P(F|H_i \cap E)$$

S3

Soit A_1, \dots, A_n n événements indépendants. Montrer que :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

S4

Un laboratoire spécialisé dans les tests antidopage prétend que le test qu'il a mis au point détecte dans 95% des cas l'usage de stéroïdes anabolisants. Ce que le laboratoire ne dit pas c'est que 15% des individus n'utilisant pas ce type de produits réagissent positivement à ce test.

10% des membres d'une équipe d'haltérophilie utilisent des stéroïdes. Soit E l'événement «un membre de l'équipe est contrôlé positif» et F l'événement «un membre de l'équipe utilise des stéroïdes». Calculer les probabilités suivantes : $P(F)$, $P(E|F)$, $P(E|\bar{F})$, $P(\bar{F})$, $P(\bar{E}|F)$, $P(\bar{E}|\bar{F})$.