

## L2 ECO MANAGEMENT

### PROBABILITES

#### TRAVAUX DIRIGES N°2

##### Thèmes abordés

- variables aléatoires ;
- fonction de répartition d'une variable aléatoire ;
- loi de probabilité d'une variable aléatoire : loi discrète, loi continue ;
- fonction d'une variable aléatoire.

##### Notions d'analyse à revoir

- limite à gauche, limite à droite ;
- fonctions croissantes ;
- fonctions continues ;
- séries numériques ;
- intégrales de fonctions réelles.

##### Notions d'algèbre à revoir

- Ensemble dénombrable ;
- Notions combinatoires : nombre de parties d'un ensemble comportant  $n$  éléments.

##### Questions à se poser

- Une fonction croissante admet-elle toujours une limite à droite et une limite à gauche ?
- Dans le cas d'une v.a. discrète que représente le saut de la fonction de répartition en un point de discontinuité ?
- Quelle différence observe-t-on, au niveau de la fonction de répartition entre une v. a. dont la loi de probabilité est discrète et une v.a. dont la loi de probabilité est continue ?
- Soit  $X$  une v.a. dont la loi de probabilité admet une densité  $f$ . Si on modifie cette densité en un ensemble dénombrable de points, la loi de probabilité de  $X$  change-t-elle ?

#### Exercices de T.D.

##### Exercice 1

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant la différence entre les nombres de «face» et de «pile» lors d'une épreuve de pile ou face répétée  $n$  fois avec une pièce bien équilibrée.

- Quelles sont les valeurs possibles de  $X$  ?
- On suppose que  $n = 3$ . Trouver la loi de probabilité de  $X$ .

##### Exercice 2

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

$$p_k = P(X = k) = Ak \text{ pour } k = 1, \dots, N.$$

- a) Calculer la constante  $A$ .
- b) Trouver la fonction de répartition de  $X$ .
- c) Tracer la fonction de répartition pour  $N = 4$

### Exercice 3

On choisit deux boules au hasard dans une urne contenant 8 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules oranges. On reçoit 2 euros pour chaque boule noire tirée et l'on perd 1 euro pour chaque boule blanche tirée. On représente les gains nets par la variable aléatoire  $X$ . Trouver la loi de probabilité de  $X$ .

### Exercice 4

On lance une pièce bien équilibrée jusqu'à obtenir pile pour la dixième fois. La variable  $X$  compte le nombre d'apparitions de face. Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?

### Exercice 5

Soit  $G$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
 G(x) &= 0 && \text{si } x < 1 \\
 G(x) &= 1/10 && \text{si } 1 \leq x < 3/2 \\
 G(x) &= 3/10 && \text{si } 3/2 \leq x < 2 \\
 G(x) &= 6/10 && \text{si } 2 \leq x < 5/2 \\
 G(x) &= 9/10 && \text{si } 5/2 \leq x < 3 \\
 G(x) &= 1 && \text{si } x \geq 3
 \end{aligned}$$

- a) Montrer que  $G$  est une fonction de répartition.
- b) Est-elle continue à gauche ou à droite ?
- c) Soit  $X$  une v. a. admettant  $G$  pour fonction de répartition. La loi de probabilité de  $X$  est-elle discrète, continue ?
- d) Calculer la probabilité :  $P(2 \leq X < 3)$ .

### Exercice 6

Soit  $G$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
 G(x) &= 0 && \text{si } x < 0 \\
 G(x) &= x/(x+1) && \text{si } x \geq 0
 \end{aligned}$$

- a) Montrer que  $G$  est une fonction de répartition.
- b) Est-elle continue à gauche, à droite ?
- c) Soit  $X$  une v. a. admettant  $G$  pour fonction de répartition. La loi de probabilité de  $X$  est-elle discrète, continue ? Dans ce dernier cas, on calculera la densité.
- d) Calculer la probabilité :  $P(2 \leq X < 3)$ .

### Exercice 7

Soit  $X$  une v. a. dont la loi de probabilité est absolument continue et admet pour densité :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= Cx^2(1-x) && \text{si } 0 < x < 1 \\
 f(x) &= 0 && \text{sinon}
 \end{aligned} \quad (C > 0)$$

- a) Tracer le graphe de  $f$ .
- b) Trouver la valeur de la constante  $C$ .

c) Calculer la probabilité :  $P(1/2 < X < 1)$

### Exercice 8

Soit  $X$  une v.a. dont la densité est :

$$f(x) = ke^{3x} \quad \text{si } x < 0$$

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x > 1$$

1) Déterminer la valeur de  $k$ .

2) Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

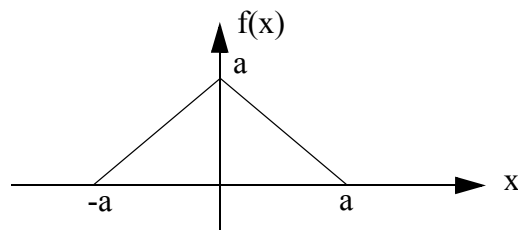
3) Tracer les graphes de  $f$  et de la fonction de répartition de  $X$ .

4) Soit  $Y$  la v.a. définie par :  $Y = e^{-X}$ . Déterminer la fonction de répartition et la densité de  $Y$ .

5) Calculer, suivant les valeurs du réel  $a$  :  $P(Y < a | X \geq -1/3)$ .

### Exercice 9

Une v.a. continue  $X$  a pour densité :



1) Trouver la valeur de  $a$ .

2) Calculer  $P(X^2 < 1/4)$

3) Déterminer la fonction de répartition et la densité de la v.a.  $Y = |X|$

### Exercice 10

On lance  $n$  dés discernables. On note  $V$  (respectivement  $U$ ) la v.a. représentant le score maximal (respectivement minimal) obtenu.

a) Trouver la loi de probabilité de  $U$ .

b) Trouver la loi de probabilité de  $V$ .