L1 ECO-GESTION

MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°4

Thèmes abordés :
- Parties convexes
- Fonctions convexes
- Optimisation avec contraintes
- Méthode du Hessien bordé

On rappelle le résultat du cours :
Soit le problème d'optimisation d'une fonction *f* de n variables avec p contraintes $g_i(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, $1 \leq i \leq p$. Soit M_0 un point critique. On note $\Delta^i B$, $p+1 \leq i \leq n$ les déterminants emboîtés d'ordre $p+1$ à n calculés en ce point.
1) Si ces déterminants sont de signe **alterné**, le premier ayant le signe de $(-1)^{p+1}$, alors M_0 est un **maximum** sous contrainte.
2) Si ces déterminants ont le signe de $(-1)^p$, M_0 est un **minimum** sous contrainte.

Exercice 1

a) La fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 3x$ est -elle convexe sur **R** ?
b) L'esemble $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x > 0, y > 0\}$ est-il une partie convexe de $\mathbf{R}^2$?
La fonction g définie sur E par :

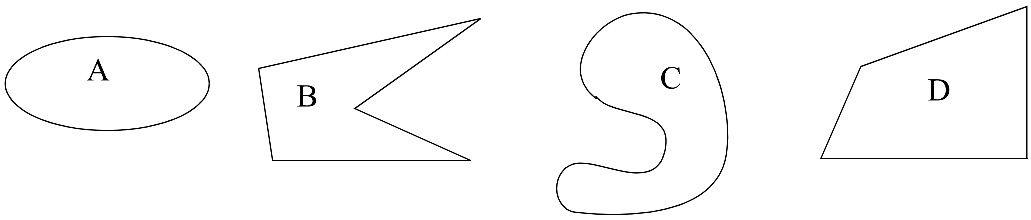
$$g(x,y) = -\ln x - \ln y$$

est-elle convexe sur E ?
c) La fonction f définie par : $g(x,y,z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$ est-elle convexe sur $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2

a) L'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x - y > 3\}$ est-il convexe ?
b) La fonction f définie par : $f(x) = -\ln x$ est -elle convexe ? Si oui, sur quel ensemble ?
c) La fonction définie par : $f(x,y,z) = -\ln x - \ln y - \ln z$ est-elle convexe ? Si oui, sur quel ensemble ?

Exercice 3
a) Les diagrammes ci-dessous représentent des parties du plan. Lesquelles sont convexes ?

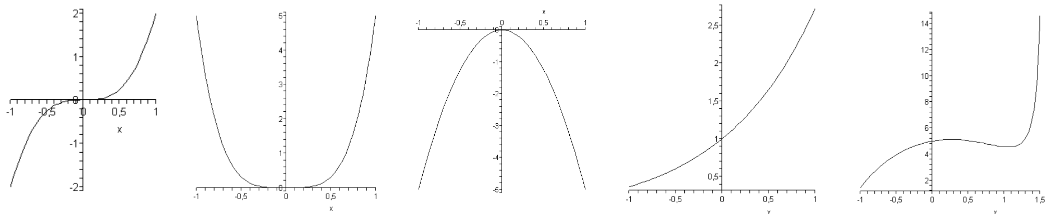


b) Montrer que la fonction suivante est convexe sur $\mathbf{R}^2$:

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3$

Exercice 4

a) Les diagrammes ci-dessous représentent les graphes de fonctions. Lesquelles sont des fonctions convexes, concaves ?



b) La fonction f définie par :

$f(x,y) = e^{2x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

est-elle convexe sur $\mathbf{R}^2$? Justifier votre réponse.

Exercice 5

Optimiser $f(x, y, z, t) = x\ln x + y\ln y + z\ln z + t\ln t$ sous la contrainte $x + y + z + t = 1$.

Pour cela :

1) Former le lagrangien L associé à ce problème.
2) Rechercher le(s) point(s) critique(s) de L.
3) En déduire le(s) point(s)critique(s) de f.
4) Utiliser la méthode du Hessien bordé pour trouver la nature du ou des points critiques.

Exercice 6

Optimiser $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Pour cela :

1) Former le lagrangien L associé à ce problème.
2) Rechercher le(s) point(s) critique(s) de L.
3) En déduire le(s) point(s)critique(s) de f.
4) Utiliser la méthode du Hessien bordé pour trouver la nature du ou des points critiques.

Exercice 7

On veut optimiser la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = xy^2 - 3xy$$

sous la contrainte : $g(x,y) = x + y - 3 = 0$

1) Ecrire le lagrangien L associé à ce problème d'optimisation.
2) Ecrire les conditions du premier ordre associées à ce problème.
3) Trouver le ou les points critiques de L.
4) Déterminer la nature du ou des points critiques de L à l'aide de la méthode du hessien bordé.
5) Calculer le gradient de f au point A (1,1).
6) Calculer la différentielle de f au point A en $(h,k) \in \mathbf{R}^2$, c'est-à-dire $df(1,1)(h,k)$