L2 ECO MANAGEMENT

PROBABILITES

TRAVAUX DIRIGES N°3

Thèmes abordés :
- Espérance mathématique
- Variance
- Moments
- Médiane
- Mode

Notions d'analyse à revoir :
- Calcul intégral et convergence d'intégrales impropres
- Séries numériques, séries entières

Questions à se poser :?
- L'espérance d'une v.a. X est-elle la valeur la plus probable de X ?
- Si une v.a. X a une variance nulle, que peut-on dire de X ?
- A votre avis, à quoi servent les moments d'une variable aléatoire ?

Exercice 1

Une station service est approvisionnée en essence une fois par semaine. Son volume X de vente hebdomadaire, en milliers de litres, est une v.a. continue admettant pour densité :

$$\begin{array}{lll} f(x) = 5(1-x)^4 & \text{si} & 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} & \end{array}$$

a) Quelle est la capacité que doit avoir le réservoir pour que la probabilité d'épuiser l'approvisionnement d'une semaine soit de 0,01 ?
b) Calculer E(X).

Exercice 2

La durée de vie d'un tube électronique est représentée par une variable aléatoire T continue dont la loi de probabilité admet une densité donnée par :

$$f(t) = \alpha^2 t\exp(-\alpha t) \qquad \text{si} \qquad t \geq 0$$

a) Calculer l'espérance de vie d'un tel tube.
b) Calculer la variance de T.

Exercice 3
Soit X une variable aléatoire entière strictement positive. On suppose que :

$$P(X = k) = (1-p)p^{k-1} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots \text{ et } 0 < p < 1 .$$

a) Calculer E(X).
b) Calculer V(X).

Exercice 4
a) Soit X une v.a. entière positive. Montrer que l'on a :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

b) Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On choisit des boules au hasard (une par une) jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une boule bleue. Calculer le nombre moyen de boules tirées dans l'urne.

Exercice 5
Calculer les moments d'ordre k pour les v.a. suivantes :
a) X suit une loi uniforme sur [0,1].
b) X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 6
a) Un poste à incendie doit être installé le long d'une route de longueur L, $L < \infty$. Si les incendies se déclarent en des points uniformément répartis sur (0, L), où doit-on placer ce poste de façon à minimiser l'espérance mathématique de la distance entre le poste et l'incendie ? Ou encore, choisissez a de manière à minimiser $E(|X-a|)$ où X est uniformément distribuée sur (0, L).
b) Supposons que la route soit infiniment longue, s'étendant de 0 à l'infini. Si la distance entre un incendie et l'origine est exponentiellement distribuée avec un paramètre λ, où doit-on alors installer le poste à incendie ? En d'autres termes, on cherche maintenant à minimiser $E(|X-a|)$ où X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
c) Que peut-on dire de la valeur de a qui minimise $E(|X-a|)$ lorsque X est une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est F ?